

مشتق

خوابگاه P.P. (مشتق) = خط مماس

$P \rightarrow P_0$

خوابگاه P.P. (مشتق) = مشتق f در x_0

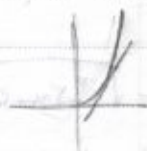
$P \rightarrow P_0$

$$(f'(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1)$$

مثال: خط مماس بر $y = x^2$ در $x_0 = 1$ ؟

$$m = f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

$$y - 1 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 1$$



تذکر (بیان معادل)

$$(1) \xrightarrow{x = x_0 + h} f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (2)$$

مشتق پذیری :

* تابع f را در x_0 مشتق پذیر گوئیم هرگاه حد (1) (یا 2) موجود باشد.
میانی، انتهای

* تابع f را در بازه (a, b) مشتق پذیر گوئیم هرگاه برای هر $x_0 \in (a, b)$ $f'(x_0)$ موجود باشد.

مثال: تابع $f(x) = x^r$ در R مشتق پذیر است.

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^r - x_0^r}{x - x_0} = rx_0$$

مثال: $f(x) = \sqrt{x}$ در $x_0 = 0$ ، $x_0 = 1$ ، x_0 دلخواه $x_0 > 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \quad f'(1) = \frac{1}{2}$$

مثال: $f(x) = |x|$ در $x_0 = 0$ ، $x_0 \neq 0$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} \begin{cases} + \\ - \end{cases}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} \begin{cases} x_0 > 0 & \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \\ x_0 < 0 & \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-x - x_0}{x - x_0} = -1 \end{cases}$$

تابع مشتق: اگر $f'(x_0)$ (برای x_0 دلخواه محاسب کنیم، عبارتی خواهیم داشت که خود یک تابع بر حسب x_0 است. با تغییر اسم x_0 به x به $f'(x)$ می‌رسیم که به آن تابع مشتق گویند.

$$f(x) = x^r \rightarrow f'(x_0) = rx_0 \rightarrow f'(x) = rx$$

تابع مشتق اول

$$f^{(n)}(x)$$

مشتق مرتبه n ام
 f_n

$$\frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = y'$$

نمادها:

تذکره: دامنه تابع مشتق، زیر مجموعه دامنه تابع است.

$$D_{f'} \subset D_f$$

$$D_{f'} = D_f - \left\{ \begin{array}{l} \text{نقاط مشتق} \\ \text{ناپذیر} \end{array} \right\}$$

مثال: $f(x) = ax^2 + bx + c$ \rightarrow $f'(x) = a(x-x_0) + b(x-x_0)$ \rightarrow $f'(-\frac{b}{2a})$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(ax^2 + bx + c) - (ax_0^2 + bx_0 + c)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (a(x+x_0) + b)$$

$$= 2ax_0 + b \Rightarrow f'(x_0) = 2ax_0 + b$$

مشتق راست و چپ

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

وجه کنید، در نقاط میانی:

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \iff f \text{ مشتق پذیر است}$$

مثال: $x_0 = 0$, $f(x) = [x]$

$$f'_+(0) = 0$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x] - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{x} = -\infty$$

$$f'(x) = x$$

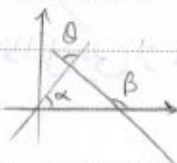
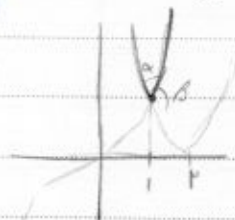
$$x_0 = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & x < 1 \\ x^2 & x \geq 1 \end{cases}$$

مثال:

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 2x + 2) - 1}{x - 1} = -1$$



$$m_1 = \tan \alpha$$

$$\theta = \beta - \alpha$$

$$m_2 = \tan \beta$$

$$\tan \theta = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$|\tan \theta| = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

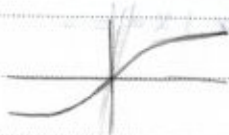
در نقطه راوی دار

$$\begin{cases} m_1 = f'_+(x_0) \\ m_2 = f'_-(x_0) \end{cases}$$

مثال: برای $f(x) = \sqrt{x}$ تابع مشتق را بدست آورده و این را بنویسید.

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x \rightarrow \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$$



$$x_0 = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \infty$$

نقاط مشتق ناپذیر:

(۱) نقاط ناپیوسته

(۲) نقاط زاریه دار $(f'_+ \neq f'_-)$

(۳) لا اتمل یکی از مشتقات یک طرفه ∞ شود (مماسی یا نیم مماسی قائم)

$$(۴) \dots f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \quad x$$

مشتق پذیری و پیوستگی:

قضیه: اگر f در x مشتق پذیر باشد، آنگاه در x پیوسته است.

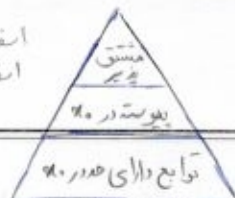
اثبات:

$$\text{فرض } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \times (x - x_0) \right) = f'(x_0) \times 0 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$$

$$\stackrel{\text{مکمل}}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$



نتایج ۴۲:

- ۱- پیوستگی شرط لازم مشتق پذیری است ولی کافی نیست مثل $|x|$ در صفر
- ۲- اگر f در x_0 ناپیوسته باشد، قطعاً در x_0 مشتق ناپذیر است.

مثال: a, b را چنان تعیین کنید که تابع f در $x_0 = 1$ مشتق پذیر باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ax^c + bx & x \geq 1 \\ 2bx + 1 & x < 1 \end{cases}$$

روش ۱

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(ax^c + bx) - (a + b)}{x - 1} \xrightarrow{a(x^c - 1) + b(x - 1)} = ca + b \quad (**)$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2bx + 1) - (a + b)}{x - 1} \xrightarrow{(*)} \frac{2b(x - 1)}{x - 1} = 2b$$

برای موجود بودن \div

$$2b + 1 - (a + b) = 0 \quad (*)$$

$$(**) \rightarrow ca + b = 2b \rightarrow b = ca$$

$$\Rightarrow a = \frac{-1}{c}, \quad b = \frac{-c}{c}$$

اول پیوستگی

روش ۲

پس برابری مشتق راست و چپ

پیوستگی: $a + b = 2b + 1$

$$\left. \begin{aligned} f'_+(1) &= ca + b \\ f'_-(1) &= 2b \end{aligned} \right\} \Rightarrow a, b \checkmark$$

در $x=1$ مشتق پذیر باشد

مثال: a, b به قسمی

$$f(x) = (x + a\sqrt{x+b})[x+1]$$

باید توان دو شود

شرط پیوستگی $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

$$(1+a+b) = 2(1+a+b) \Rightarrow 1+a+b=0$$

$$f'_+(1) = f'_-(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x+a\sqrt{x+b}) - 2(1+a+b)}{x-1} = 2+a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(a+b+1)(x+a\sqrt{x+b}) - 2(a+b+1)}{x-1} = 1 + \frac{a}{r}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{a}{r} = 2+a \Rightarrow \begin{cases} a = -r \\ b = 1 \end{cases}$$

$$[x-1]$$

$$(x-1)[x-1]$$

$$(x-1)^2[x-1]$$

توسعه پذیری

قضای مشتق:

① تابع ثابت:

$$f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$$

اثبات:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0$$

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

② تابع توانی $n \in \mathbb{N}$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} \rightarrow (x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x_0^{n-1})$$

$$= nx_0^{n-1}$$

$$y = k f(x) \Rightarrow y' = k f'(x) \quad \text{③ ضریب ثابت}$$

$$y = f(x) \pm g(x) \Rightarrow y' = f'(x) \pm g'(x) \quad \text{④}$$

f, g مشتق پذیر

اثبات:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

$$y = 2x^4 - 5x^2 + 7$$

مثال:

$$ع ٥ \quad y' = (2x^4)' - (5x^2)' + (7)'$$

$$ع ٥ \quad = 2(x^4)' - 5(x^2)' + (7)' = 2 \times 4x^3 - 5 \times 2x + 0 = 8x^3 - 10x$$

تذکر: اگر \Leftarrow مشتق چند جمله‌ای

$$y = ax^n + bx^{n-1} + \dots + c, \quad y' = nax^{n-1} + (n-1)bx^{n-2} + \dots + 0$$

⑤ رادیکال:

$$f(x) = \sqrt[n]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}}{x - x_0} \stackrel{A}{=} \frac{1}{n(\sqrt[n]{x_0})^{n-1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{A} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x_0})^{n-1}}$$

$$(x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n x^{\frac{n-1}{n}}}$$

تذکر:

$$(n=2 \Rightarrow (\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}})$$

$$\begin{cases} D_{f'} = \mathbb{R}^+ & \text{چون} \\ D_f = \mathbb{R} - \{0\} & \text{چون} \end{cases}$$

f, g مشتق پذیر

④ حاصل ضرب :

$$y = f(u)g(u) \Rightarrow y' = f'(u)g(u) + f(u)g'(u)$$

$$(uv)' = u'v + v'u \quad (\text{بیان مختصر})$$

$$y' = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(u)g(u) - f(u_0)g(u_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(u)g(u) - f(u)g(x_0) + f(u)g(x_0) - f(u_0)g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(f(u) \frac{g(u) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0) \frac{f(u) - f(u_0)}{x - x_0} \right)$$

$$= f(u_0)g'(u_0) + g(x_0)f'(u_0)$$

$f \rightarrow \text{مشتق}$
 $u \rightarrow \text{مشتق}$

$$y = (x^2 + x)\sqrt{x}$$

مثال :

$$y' = (x^2 + x)' \sqrt{x} + (x^2 + x)(\sqrt{x})' = (2x + 1)\sqrt{x} + (x^2 + x) \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y = \frac{f(u)}{g(u)} \Rightarrow y' = \frac{f'(u)g(u) - g'(u)f(u)}{(g(u))^2} \quad \text{⑤}$$

f, g مشتق پذیر

f, g مشتق پذیر
 $g(u) \neq 0$

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad (\text{بیان مختصر})$$

$$(uvw)' = u'vw + u'v'w + uv'w'$$

تعمیم قاعده مشتق

$$f = uvw$$

$$\frac{f'}{f} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)/g(x) - f(x_0)/g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0)}{(x - x_0)g(x)g(x_0)}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \left(-f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$$

$$= \frac{1}{(g(x_0))^2} (-f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0))$$

$$\left(\left(\frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2} \right) \quad \text{مثال ۱} \quad \left(\frac{1}{x^n} \right)' = -\frac{n}{x^{n+1}} \quad \text{Ⓐ}$$

$$(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$$

توجه: می توان این را

$$\left(\frac{1}{x^n} \right)' \stackrel{v_0}{=} \frac{0 \cdot x^n - nx^{n-1} \cdot 1}{(x^n)^2} = -\frac{n}{x^{n+1}} \quad \text{اثبات}$$

مثال: مشتق بگیر!

$$y = 1x^c + \frac{c}{x^r} \rightarrow y' = r \varepsilon x^r - \frac{c}{x^c}$$

$$y = (\delta x^r + \varepsilon u)(x^c - u) \rightarrow y' = (1 \cdot x + \varepsilon)(x^c - u) + (cx^r - 1)(\delta x^r + \varepsilon u)$$

$$y = \frac{cx^r + 1}{x^c - 1} \rightarrow y' = \frac{cx(x^c - 1) - (cx^r + 1)(cx^r - 1)}{(x^c - 1)^2}$$

$$y = \frac{(x^c - 1)(x^r + 1)}{x^c} \rightarrow y' = \frac{(cx^r(x^r + 1) + rx(x^c - 1))x^c - \varepsilon x^c(x^c - 1)(x^r + 1)}{x^{2c}}$$

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \rightarrow y' = \frac{a(cx+d) - (c(ax+b))}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

⑨ مشتق تابع مثلثی

$$1) y = \sin x \rightarrow y' = \cos x$$

$$2) y = \cos x \rightarrow y' = -\sin x$$

$$3) y = \tan x \rightarrow y' = 1 + \tan^2 x \left(= \frac{1}{\cos^2 x} \right) \quad x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$4) y = \cot x \rightarrow y' = -(1 + \cot^2 x) \left(= -\frac{1}{\sin^2 x} \right) \quad x \neq k\pi$$

اثبات:

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin \frac{x-x_0}{r} \cdot \cos \frac{x+x_0}{r}}{\frac{x-x_0}{r}} = \cos x_0$$

$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1 \quad u = \frac{x-x_0}{r} \rightarrow 0$

$$2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \frac{\cos x \cdot (\cos h - 1) - \sin x \cdot \sin h}{h} = -\sin x$$

$$3) \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x) \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

⑩ مشتق تابع مرکب

$$y = f(g(x)) \rightarrow y' = g'(x) \cdot f'(g(x))$$

g, x, f' در مشتق پذیر باشد.

$$(\sin(rn))' = r \times \cos(rn)$$

$$g(x) = rn$$

$$f(u) = \sin u \rightarrow f'(u) = \cos u$$

$$(f(u))' = u' f'(u)$$

$$y = f(u) \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{df}{du} \times \frac{du}{dx}$$

اثبات: (با فرض $g(u) \neq g(u_0)$ و x_0 همبستگی)

$$y' = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \times \frac{g(x) - g(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

$$u = g(x) \quad u_0 = g(x_0) \quad = \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{f(u) - f(u_0)}{u - u_0} \times \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= f'(g(x_0)) g'(x_0)$$

↑
مشتق تابع g
← برای حد برابر مقدار تابع

برای توابع مثل $g(x) = \begin{cases} x^r \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ اثبات دقیق‌تری نیاز است.

$$y = \sqrt{(1+x)^c} = \frac{g'(x)}{r \sqrt{g(x)}} \quad \begin{matrix} \nearrow g(x) = (1+x)^c \\ \searrow g'(x) = r \times (1+x)^{c-1} \end{matrix}$$

$$y = (x^c + 1)^c \rightarrow y' = \underbrace{x^c}_{g'} \times \underbrace{c(x^c + 1)^{c-1}}_{f'(g)}$$

$g(x) = x^c + 1$
 $f(u) = u^c$

$$y = x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} \quad y' = (m x^{m-1}) \times \frac{1}{n \sqrt[n]{(x^m)^{n-1}}} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$$

$$f(u) = \sqrt[n]{x} \rightarrow f'(u) = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$g(u) = x^m \rightarrow g'(u) = m x^{m-1}$$

$$m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} & (x^m)^{\frac{1-n}{n}} x^{m-1} \\ & \downarrow \\ & x^{m/n - m + m - 1} \end{aligned}$$

$$- y = au^n \rightarrow y' = nau' u^{n-1}$$

$$- y = \sqrt{u} \rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$- y = \frac{1}{u} \rightarrow y' = \frac{-u'}{u^2}$$

$$- y = \frac{au+b}{cu+d} \rightarrow y' = \frac{ad-bc}{(cu+d)^2} \times u'$$

$$- y = \sin u \rightarrow y' = u' \cos u$$

$$y = \frac{\sqrt{x}}{x^r+1} \quad \frac{\sqrt{x}'(x^r+1) - (x^r+1)'\sqrt{x}}{(x^r+1)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^r+1) - x^r(\sqrt{x})}{(x^r+1)^2}$$

$$y = (1+\sqrt{x})^c \rightarrow \frac{c}{2\sqrt{x}} (1+\sqrt{x})^{c-1}$$

$$y = \frac{x}{x+\sqrt{x}} \quad \frac{x'(x+\sqrt{x}) + (x+\sqrt{x})'x}{(x+\sqrt{x})^2} = \frac{(x+\sqrt{x}) + (1+\frac{1}{2\sqrt{x}})x}{(x+\sqrt{x})^2}$$

$$y = \sin^r x \quad (r)' \sin^r x = r \cos x$$

$$y = \sin^r x \quad \sin^r x \sin x + \sin^r x \sin x = r \cos x \sin x = \sin^r x$$

$$y = \cos^r x \quad y' = r(-\sin x) \cos x = -\sin^r x$$

$$y = \frac{1}{\sin x + \cos x} \quad \frac{0x(\sin x + \cos x) + 1(\sin x + \cos x)' = -(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{-(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$y = r \cos^r \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{r} \right) = 1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{r} \right) \Rightarrow y' = + \frac{1}{r} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{r} \right)$$

$$y = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \tan \left(\frac{x}{r} - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$y = \sin^e(\sqrt{x}) = r'(\sin^r x)' \sin^r x$$

اگر $f(x) = x + \frac{1}{x}$ باشد، مشتق $f\left(\frac{1}{x}\right)$ را، در $x = \frac{1}{r}$ محاسبه کنید.

$$y' = \frac{-1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) \Big|_{x=\frac{1}{r}} = -\frac{1}{\frac{1}{r^2}} f'(r) = -r^2 \cdot 1 = -1.$$

- ثابت کنید تابع مشتق یک تابع مشتق یک تابع زوج، تابعی است فرد، تابع مشتق یک تابع فرد تابعی است زوج.

$$f_{(-x)} = f(x) \xrightarrow{\text{مشتق}}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{x+1}} = (x+1)^{-1/2} \rightarrow y' = -\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} (x+1)^{-3/2}$$

$$y = \left(\frac{x-1}{x-2}\right)^r \rightarrow y' = r x^{\frac{-r}{(x-2)^r}} \left(\frac{x-1}{x-2}\right)^{r-1}$$

$$y = \sqrt{(x^2+1)^5 + 2} \rightarrow y' = \frac{((x^2+1)^5 + 2)'}{2\sqrt{(x^2+1)^5 + 2}}$$

$$f(u) = \sqrt{u}$$

$$g(u) = (x^2+1)^5 + 2$$

تیم قاعده زنجیره‌ای:

$$y = f(g(h(x))) = h'(x) g'(h(x)) f'(g(h(x)))$$

$$y = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{r}}{1 + \tan^2 \frac{x}{r}} = \frac{-u+1}{u+1} \rightarrow y' = \frac{-r}{(1 + \tan^2 \frac{x}{r})^2} \times \frac{1}{r} (1 + \tan^2 \frac{x}{r})$$

$$u = \tan^2 \frac{x}{r}$$

تمرین درهای و نکته

۱- مشتق توابع زیر در x_0 داده شده را بیست آورید

$$1) f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \quad x_0 = 0$$

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{x-0} = -4$$

$$2) f(x) = \frac{(x^2+1) \sin x}{x+r} \quad x_0 = 0$$

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(x^2+1) \sin x}{x+r}}{x} = \frac{x^2+1}{x+r} = \frac{1}{r}$$

نکته: اگر $f(u) = g(u)$, $h(u) = 0$, مشتق f را f' و h را h' بنویسیم. $x=a$ خواهم:

$$f'(u) = g'(u)h(u) + g(u)h'(u) = g(a)h'(a)$$

یعنی در نقطه a کافی است از عامل h مشتق بگیریم.

۲- اگر $f^{(k)}(1)$ و $f(u) = (x-1)^n \frac{\sqrt{x}}{\sin^2 u}$

نکته: $f(u) = (x-a)^n g(u) \rightarrow f'(u) = (x-a)^{n-1} g(u)$

اثبات: $f'(u) = n(x-a)^{n-1} g(u) + (x-a)^n g'(u)$

$$= (x-a)^{n-1} (ng(u) + (x-a)g'(u))$$

نتیجه: $\begin{cases} f^{(k)}(a) = 0, & k = 1, 2, 3, \dots, n-1 \\ f(a) = 0 \end{cases}$

۳- تست ۷ فصل ۱: $f(x) = ax^5 + bx^3 + x^2 - 1$ بر $x^2 - 2x + 1$ بخش پذیر باشد، a, b را بیابیم.

از نتیجه ۱ $\rightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \rightarrow a + b + 1 - 1 = 0 \\ f'(1) = 0 \rightarrow 5a + 3b + 2 = 0 \end{cases}$

$$f'(x) = 5ax^4 + 3bx^2 + 2x$$

۴- نشان دهید که اگر f در a پیوسته و مشتق پذیر باشد، تابع $g_{f,a}(x) = (x-a)f'(x)$ در $x=a$ مشتق پذیر است.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)f'(x)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} f'(x) = f'(a)$$

$$(x-a)^n |x-a| \rightarrow |x| \quad \text{و} \quad x|x|$$

۵- اگر $f(x) = x^c + \sqrt{x}$ باشد حاصل حدهای زیر چند است؟

$$1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-h)}{h} \stackrel{h'=1-h}{=} \lim_{h' \rightarrow 0} \frac{f(1+h') - f(1)}{h'} = f'(1) = c + \frac{1}{2}$$

$$2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-2h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(1+h) - f(1)}{h} + 2 \frac{f(1) - f(1-2h)}{2h} \right) \\ = f'(1) + 2f'(1) = 3f'(1) = 3(c + \frac{1}{2})$$

نکته: در حالت کلی اگر f در x_0 مشتق پذیر باشد و $k \neq 0$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + nh) - f(x_0 + mh)}{kh} = \frac{n-m}{k} f'(x_0)$$

اثبات:

$$\frac{1}{k} \left(n \underbrace{\frac{f(x_0 + nh) - f(x_0)}{nh}}_{f'(x_0)} - m \underbrace{\frac{f(x_0 + mh) - f(x_0)}{mh}}_{f'(x_0)} \right)$$

حالت خاص مهم :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} = f'(x_0)$$

(البته نسبت به تعریف اولیه، مشتق راست و چپ جابجانه است)

④ حاصل حدی زیر :

$$1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{r+h} - \sin \sqrt{r}}{rh} = \frac{1}{r} (\sin \sqrt{x})' \Big|_{x=r}$$

$$= \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{r}} \cos \sqrt{x} \Big|_{x=r} = \frac{1}{\sqrt{r}} \cos \sqrt{r}$$

$$2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan(\frac{\pi}{4} - h) - \tan(\frac{\pi}{4} + rh)}{h^2 + rh} = \frac{f(x_0) - f(x_0 + rh)}{h(h+r)}$$

$$\frac{(-1) - r}{r} f'(\frac{\pi}{4}) = -\frac{r}{r} \times \frac{1}{1} = -1$$

$$f(x) = \tan x \Rightarrow y' = 1 + \tan^2 x$$

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & x \geq 1 \\ x^2 + \varepsilon x + b & x < 1 \end{cases}$$

۷- به ازای چه مقدار a و b تابع با مشتق

در $x=1$ مشتق پذیر است ؟ (روش حدی)

$$a + r = b + 0 \Rightarrow a - b = -r$$

شرط ۱ پیوستگی

شرط ۲ (مشتق راست و چپ برابر)

$$f'(x_0) = \begin{cases} a & x > 1 \\ 2x+8 & x < 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{لیمو}} \left. \begin{aligned} f_+(1) &= a \\ f_-(1) &= 2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} a &= 2 \\ b &= 2 \end{aligned}$$

تفسیر: اگر f در a پیوسته و در همسایگی a مشتق پذیر باشد، نگاه داشته شود موجود بودن $f'(a)$ در همسایگی a بی‌توان نوشت:

$$\begin{cases} f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) \\ f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} f'(x) \end{cases} \quad \text{در صورت وجود}$$

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \sin t + \frac{1}{3} \sin^3 t}{t^3}$$

$x = Ct$
 A

$$= \frac{1}{3} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \sin t}{t^3} + \frac{1}{3} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^3 t}{t^3}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{3} A + \frac{1}{3} \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \cos u}{u^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u - \sin u}{u^3} = \frac{1}{6}$$

$$B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{\sin x}{x} \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1 - \cos x}{\cos x}$$

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^3} = A - B = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{12}$$

۱. $f(x) = \begin{cases} x-x^2 & x \geq 1 \\ 1-x^2 & x < 1 \end{cases}$ مشتق پذیر است؟

$$f'(x) = \begin{cases} 1-2x & x > 1 \\ -2x & x < 1 \end{cases}$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = -2$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -2$$

۹. نقاط مشتق ناپذیر توابع زیر؟

$$f(x) = |x^r(x-1)|$$

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^r|x-1| - x_0^r|x_0-1|}{x-x_0}$$

$(x=1)$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^r|x-1| - 1}{x-1}$$

$$f(x) = \sqrt[r]{(x-1)(x-2)^r(x-3)^r}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt[r]{(x-1)(x-2)^r(x-3)^r} - \sqrt[r]{(x_0-1)(x_0-2)^r(x_0-3)^r}}{x-x_0}$$

$$x_0 = 1, 2, 3$$

بازگشت
میانگ
(نقطه عطف با علامت)
ماتم

$$(x-a)^k [x-a] \quad k \geq 2 \quad \text{مشتق پذیر}$$

$$(x-a)^k |x-a| \quad k > 0 \quad \text{مشتق پذیر}$$

در مثال ۷: تذکر: ممکن است $f'(a)$ موجود باشد ولی $\lim_{x \rightarrow a} f'$ موجود نباشد.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x-0} = 0$$

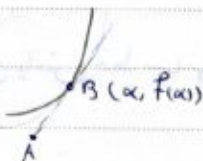
$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

مشتق دارد

خط مماس و قائم:



نقطه روی منحنی



نقطه بیرون منحنی

الف) از نقطه A واقع بر منحنی

مثال ۱: معادله خط مماس و قائم بر منحنی $y = \frac{x}{x+1}$ در $x = 1$ (واقع بر منحنی)

$$y' = \frac{(x+1) - x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow m = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{مماس}} y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x-1)$$

$$\xrightarrow{\text{قائم}} y - \frac{1}{2} = -2(x-1)$$

مثال ۲: نقطه‌ای از منحنی $y = x^2 - x$ را بیابید که خط مماس بر منحنی در آنجا موازی نیم‌ساز ربع اول و سوم باشد.

$$y' = 2x - 1 = 1 \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{2}{e}}$$



مثال ۳: معادله مماس و قائم بر $f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 + x \sin \frac{1}{x} = 1$$

مماس: $y = x$ قائم: $y = -x$

تذکر: یک روش دیگر که گاهی برای یافتن خط مماس مفید است:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = mx + h \end{cases} \rightarrow \text{بیشینه‌ضلع}$$

(به درختانه روی منحنی نمی‌خورد)

در مثال 1:

$$\begin{cases} y = \frac{x}{x+1} \\ y = mx + h \end{cases} \quad \text{از } (1, \frac{1}{2}) \text{ بگذرد}$$

$$\frac{x}{x+1} = m(x-1) + \frac{1}{2} \rightarrow x = m(x-1) + \frac{1}{2}(x+1)$$

$$mx^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - m = 0$$

$$\Delta = \frac{1}{4} - 4m(\frac{1}{2} - m) = 0$$

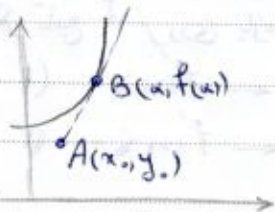
$$\begin{cases} y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) & \text{مماس} \\ y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) & \text{تangent} \end{cases}$$

$$f'(x_0) = 0 \quad \begin{cases} \text{مماس} & y = y_0 \\ \text{تangent} & x = x_0 \end{cases}$$

$$f'(x_0) = \infty \quad \begin{cases} \text{مماس} & x = x_0 \\ \text{تangent} & y = y_0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x) - \tan(\sin x)}{x^3}$$

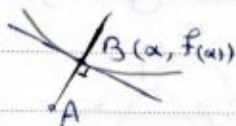
ب) خط مماس و قائم بر منحنی از نقطه غیر واقع بر منحنی:



$$m_{AB} = f'(x)$$

خط مماس:

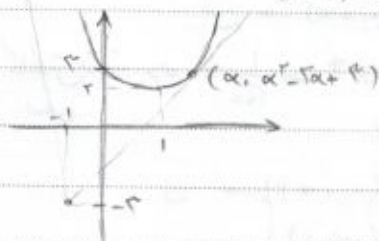
$$\frac{f(x) - y_0}{x - x_0} = f'(x) \rightarrow x \checkmark \rightarrow \text{خط}$$



خط قائم:

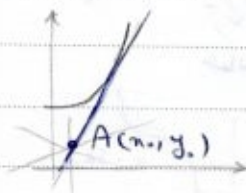
$$m_{AB} = \frac{-1}{f'(x)}$$

مثال: خطهای مماس و قائم بر منحنی $y = x^2 - 2x + 2$ از $A(-1, -2)$ می‌گذرد یا بیاید.



$$\frac{(x^2 - 2x + 2) - (-2)}{x - (-1)} = 2x - 2$$

$$x^2 + 2x - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x=2 \rightarrow f(2)=2 \rightarrow y+2=2(x+1) \\ x=-2 \rightarrow f(-2)=-4 \rightarrow y+2=-4(x+1) \end{cases}$$



روش دوم خط مماس:

دستگاه زیر باید ریشه مضاعف داشته باشد

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = m(x - x_0) + y_0 \end{cases}$$

حل مثال قبل بر این روش:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 2 \\ y = m(x + 1) - 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 - (2+m)x + 4-m = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow (2+m)^2 - 4(4-m) = 0$$

$$m^2 + 4m - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ m=-6 \end{cases}$$

بررسی صعودی/نزولی بودن به کمک مشتق:

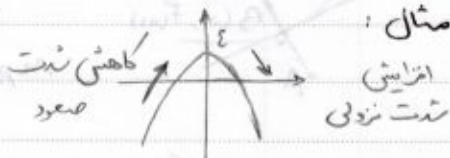
اگر تابع f بر روی بازه I مشتق پذیر باشد و در تمام این بازه:

(۱) $f'(x) \geq 0 \leftarrow f$ روی I صعودی است.

(۲) $f'(x) \leq 0 \leftarrow f$ روی I نزولی است.

تذکر: اندازه مشتق، شدت صعود (نزول) را نشان می‌دهد.

$$f(x) = \varepsilon - x^2$$



$$(0, +\infty) \rightarrow \text{ن}$$

$$(-\infty, 0) \rightarrow \text{ص}$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$[0, +\infty) \rightarrow \text{ص}$$

$$(x \geq 0)$$

$$x \uparrow \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} \downarrow \Rightarrow \text{کاهش شدت صعود}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

$$(0, +\infty) \rightarrow \text{ن}$$

$$(-\infty, 0) \rightarrow \text{ص}$$

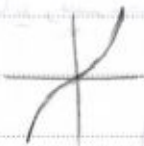
(۳) $f'(x) > 0$ یا $f'(x) < 0 \leftarrow f$ روی بازه I الیاً صعودی است

(۴) $f'(x) < 0$ یا $f'(x) > 0 \leftarrow f$ روی بازه I الیاً نزولی است

همان‌طور در مثال جدا از هم

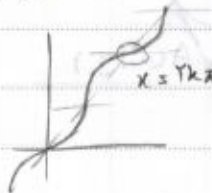
$$f(x) = x^n$$

$$f'(x) = nx^{n-1}$$



$$f(x) = x - \sin x$$

$$f'(x) = 1 - \cos x$$



مثال: وضعیت صعودی/نزولی بودن تابع زیر را در بازه‌های مختلف بررسی کنید.

$$f(x) = x^2 - x \quad f'(x) = 2x - 1$$

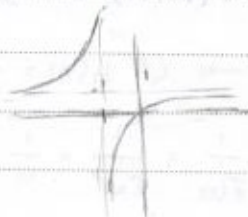
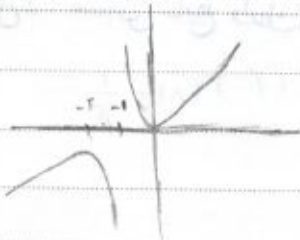
$$f(x) = x^3 + x^2 + x \quad f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 > 0$$

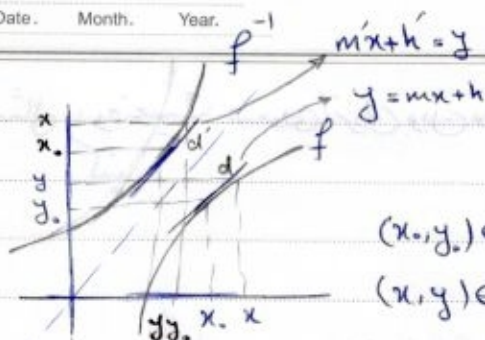
$$f(x) = x^3 + 2x^2 + x \quad f'(x) = 3x^2 + 4x + 1 \quad \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad \begin{matrix} - & + & - & + \\ & + & 0 & - & 0 & + \end{matrix}$$

$$f(x) = \frac{x}{x+1} \quad f'(x) = \frac{(x+1) - x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \quad \begin{cases} (-\infty, -1) \rightarrow \text{افزایش شدت} \\ (-1, +\infty) \rightarrow \text{کاهش شدت} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1} \quad f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-\infty, -2] \rightarrow \text{کاهش شدت} \quad \text{ص} \\ (-2, -1) \rightarrow \text{افزایش شدت} \quad \text{ن} \end{cases} \quad \begin{cases} (-1, 0) \rightarrow \text{کاهش شدت} \quad \text{ن} \\ [0, +\infty) \rightarrow \text{افزایش شدت} \quad \text{ص} \end{cases}$$





مشتق تابع وارون:

$$(x, y) \in f \leftrightarrow (y, x) \in f^{-1}$$

$$(x, y) \in f \leftrightarrow (y, x) \in f^{-1}$$

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$\begin{matrix} \nearrow x \\ \searrow x \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \nearrow y \\ \searrow y \end{matrix}$

$\begin{matrix} \text{مشتق وارون} \\ \text{مشتق} \end{matrix}$

نتیجه:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} \quad \begin{matrix} b = f(a) \\ a = f^{-1}(b) \end{matrix}$$

مثال ۱: مشتق تابع وارون $y = x^c$ در نقطه $(1, 2)$ ؟

$$\text{روش ۱: } f(x) = \sqrt{x} \rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(x)} \Rightarrow (f^{-1})'(1) = \frac{1}{1/2}$$

$$\text{روش ۲: } (f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{1/2} = \frac{1}{1/2}$$

مثال ۲: مشتق تابع وارون $y = x^c + cx$ در نقطه ای به طول ۴؟

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}$$

$$a^c + ca = 4 \rightarrow a = 1$$

$$\text{ص. ۱ } f \rightarrow (1, 1)$$

$$f'(x) = cx^r + r > 0 \quad \text{ص. ۱}$$

تمرین ۲: (برای اثبات کتاب درسی)

نسبت به x تمیز d → $m' = \frac{1}{m} \rightarrow (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$
(طریق)

$$m(m'x + h') + h = x \Rightarrow m' = \frac{1}{m}$$

$$g(x) = f^{-1}(x)$$

روش ۲:

$$1) g(f(x)) = x \quad f'(x) g'(f(x)) = 1$$

$$\Rightarrow g'\left(\frac{f(x)}{b}\right) = \frac{1}{f'(x)} \underset{a}{}$$

$$2) f(g(x)) = x$$

$$g'(x) f'(g(x)) = 1 \rightarrow g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \underset{b}{\downarrow} \underset{a}{}$$

مثال ۲: مشتق تابع وارون $f(x) = x^c$ در نقطه دلخواه.

$$g(x) = f^{-1}(x)$$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{c(\sqrt{x})^c} = \frac{1}{c\sqrt{x}}$$

مشتق توابع وارون مثلثاتی:
(قاعده ۱۱)

$$D_f: [-1, 1] \quad R_{f^{-1}}: (-1, 1)$$

$$1) (\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad 2) (\cos^{-1} x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$3) (\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad 4) (\cot^{-1} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$D_f: \mathbb{R} \quad R_{f^{-1}}: \mathbb{R}$$

اثبات:

$$1) f(u) = \sin x \rightarrow f'(u) = \cos x$$

$$g(u) = \sin^{-1} x$$

$$g'(u) = \frac{1}{f'(g(u))} = \frac{1}{\cos(\sin^{-1} u)} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$3) f(u) = \tan x \rightarrow f'(u) = 1 + \tan^2 x$$

$$g(u) = \tan^{-1} x$$

$$g'(u) = \frac{1}{f'(g(u))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\tan^{-1} u)} = \frac{1}{1+u^2}$$

مثال: مشتق

$$1) y = \cos^{-1}(x^2 + 2x) \rightarrow y' = \frac{-(2x+2)}{\sqrt{1-(x^2+2x)^2}}$$

$$2) y = \tan^{-1}(\sqrt{1-x^2}) \rightarrow y' = \frac{-x/\sqrt{1-x^2}}{1+(1-x^2)} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$3) y = \sin^{-1} x + \cos^{-1} x$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad (y = \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}$$
 $x'(t)$

مَرَّط

لحظہ (ای)

مکان نشست بزمیان

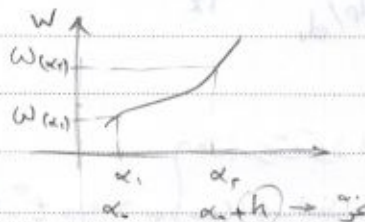
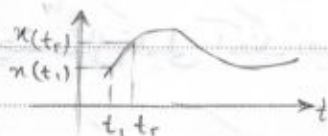
در حالت کلی اهل تغییرات (با نسبت به α)

$$\frac{\Delta W}{\Delta x} = \frac{W(\alpha_r) - W(\alpha_l)}{\alpha_r - \alpha_l}$$

$$\alpha, \bar{\alpha}, \alpha, \bar{\alpha}$$

الحظاي (، الحظاي)

$$\frac{dw}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{w(x+h) - w(x_0)}{h} \rightarrow w'(x_0)$$



مثال : الف) هنگام تغییرات متوسط مساحت دایره نسبت به شعاع آن،
و ب) شعاع از 1 تا 2 تغییر می کند؟

$$S = \pi r^2 \quad \frac{S(r) - S(1)}{r - 1} = \frac{\pi r^2 - \pi}{r - 1} = \pi r$$

(ب) ۱۳ ۱۲ ۱۱ ۱۰ ۹ ۸ ۷ ۶ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱

در (الحفظ) شعاع ۲؟

$$S'_{\text{par}} \quad S'(r) = \sum \pi$$

6. a. base n. 16 17 18 19 20 (2)

$$S(r) = \pi r^2 \Rightarrow r = \frac{P}{\pi} \quad S(P) = \frac{\pi P^2}{\pi} = \frac{P^2}{\pi}$$

$$P = 2\pi r$$

$$S' = \frac{2P}{\pi} = \frac{P}{\pi} = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \quad r = 2 \rightarrow P = 2\pi$$

$$S = S(r(P))$$

روش ۲

$$S' = r'(P) S'(r(P))$$

$$\rightarrow \frac{ds}{dP} = \frac{dr}{dP} \times \frac{ds}{dr} = 2\pi r \times \frac{1}{2\pi} = r \rightarrow 2$$

روش ۳

$$\frac{ds}{dP} = \frac{ds/dr}{dP/dr} = \frac{2\pi r}{2\pi} = r \rightarrow 2$$

چند مثال تکمیلی آهنگ تغییرات

الف) سرعت متوسط از $t=0$ تا $t=1$ ب) سرعت لحظه‌ای بر حسب t ج) لحظات t_1 و t_2 را توصیف کنید.

$$x(t) = t^3 - 2t^2 + t \quad \text{رابطه حرکت حرکت:}$$

$$r(t) = t^3 + t \quad \text{۲) اگر شعاع دایره‌ای با رابطه}$$

تغییر کنید، آهنگ تغییرات مساحت آن را بیابید.

۳) آهنگ تغییر مساحت کره نسبت به حجم آن وقتی شعاع کره برابر ۲ باشد را

بیابید.

$$1) \text{ الف) } \frac{x(1) - x(0)}{1 - 0} = \frac{0 - 0}{1} = 0$$

$$\text{ب) } v(t) = x'(t) = 3t^2 - 4t + 1$$

$$2) \text{ توقف لحظه‌ای } \begin{array}{c|c} 1/3 & 1 \\ \hline v(t) & + 0 - 0 + \end{array}$$



$$2) S = \pi r^2$$

$$r(t) = t^3 + t$$

$$\text{شی ۱} \rightarrow S(t) = \pi (t^3 + t)^2$$

$$S'(t) = 2\pi (t^3 + t)(3t^2 + 1)$$

$$\text{ررش } \frac{ds}{dt} = \left(\frac{ds}{dr} \right) \times \frac{dr}{dt}$$

$$r) \frac{ds}{dt} = \frac{ds/dr}{ds/dr} = \frac{\Lambda x v}{\Sigma x r} = \frac{r}{r} \Rightarrow 1$$

$$r = \sqrt{\frac{c\omega}{\Sigma x}} \rightarrow S = \Sigma x \left(\sqrt{\frac{c\omega}{\Sigma x}} \right)^2 \rightarrow \frac{ds}{dt} = \Sigma x \times r \left(\frac{r/\Sigma x}{r \sqrt{\frac{c\omega}{\Sigma x}}} \right) \left(\sqrt{\frac{c\omega}{\Sigma x}} \right)$$

$$= r / \sqrt{\frac{c\omega}{\Sigma x}} = r/r = 1$$

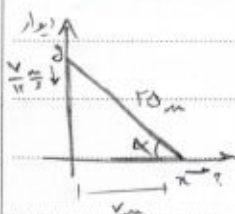


$$\alpha'(t) = -r \frac{\cos \alpha}{y}$$

$$\alpha = \pi/6 \rightarrow \text{در لحظه ای} \rightarrow l'(t) = ?$$

5

د- تردبانی به طول ۲۵m به دیوار بتکیده داده شده است. اگر انتهای بالای نزدیکان با سرعت ۷/۱۱ به سمت پایین بلغزد. در لحظه ای که انتهای پایین نزدیکان ۷m تا دیوار فاصله دارد. سرعت لغزیدن پای نزدیکان چقدر است؟



$$\begin{cases} x^2(t) + y^2(t) = 25^2 \\ y'(t) = -7/11 \end{cases}$$

$$2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0$$

$$x'(t) = \frac{-y(t)}{x(t)} y'(t) \rightarrow \tan \alpha$$

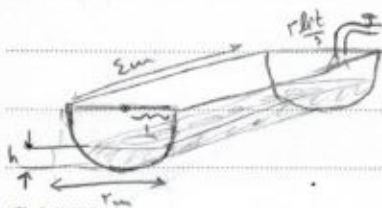
$$= -25/\sqrt{x} \times \sqrt{y}/11 = r$$

$$5) l^2 = r^2 + r^2 - 2r \times r \cos \alpha \rightarrow l'(t) = 0 - \Sigma \cos \alpha(t)$$

$$1- \text{ش } l(t) = \sqrt{0 - \Sigma \cos \alpha(t)} \rightarrow l'(t) = \frac{\alpha'(t) \times \Sigma \sin \alpha(t)}{r \sqrt{0 - \Sigma \cos \alpha(t)}}$$

$$\rightarrow \frac{-r \times \Sigma \sqrt{c}/r}{r \sqrt{0 - r}} = -r$$

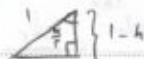
$$2- \text{ش } r l'(t) \frac{l(t)}{\sqrt{c}} = \Sigma \frac{\alpha'(t)}{-r} \frac{\sin \alpha(t)}{\sqrt{c}/r} \rightarrow l'(t) = -r$$



$$h = \frac{1}{r} \rightarrow \frac{dh}{dt} = ?$$

4

$$V(h) = \int S(h)$$



$$\cos \frac{\alpha}{2} = 1-h$$

$$S = \frac{1}{r} (\alpha \sin \alpha) \Rightarrow V(h) = \int \cos^{-1}(1-h) - r \sin(\cos^{-1}(1-h))$$

$$\alpha = \cos^{-1}(1-h)$$

$$\frac{\int \sin(\cos^{-1}(1-h)) \cos(\cos^{-1}(1-h))}{\sqrt{1-(1-h)^2} \cdot r \cdot h}$$

$$V(h) = \int (\cos^{-1}(1-h) - (1-h) \sqrt{rh-h^2})$$

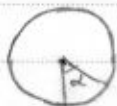
$$V'(h) = \int \left(\frac{+1}{\sqrt{rh-h^2}} + \sqrt{rh-h^2} - (1-h) \frac{r(1-h)}{r \sqrt{rh-h^2}} \right)$$

$$= \frac{\int}{\sqrt{rh-h^2}} \left(r + rh-h^2 - (r-rh+h^2) \right) = \int \sqrt{rh-h^2}$$

$$r \times 1^{-c}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dh} \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\sqrt{r}}{2} \times 1^{-c}$$



$$r \alpha \rightarrow r r'$$

$$S_\alpha = \frac{1}{r} r' \alpha$$

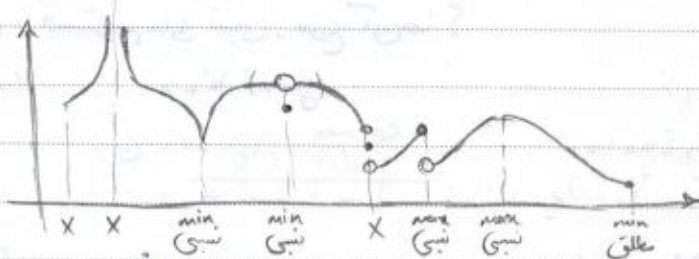
کاربرد مشتق } (الف) صعودی/نزولی بودن ✓
 (ب) نقاط استرس (ماکزیم یا مینیم)
 (ج) جهت تغییر نقاط عطف
 (د) رسم نمودار

(ب) نقاط استرس } مطلق
 $x_0 \in D_f : \forall x \in D_f \quad f(x_0) \leq f(x)$
 $\Rightarrow \min$
 نسبی
 $x_0 \in D_f : \exists f \quad \forall x \in I$
 $f(x_0) \leq f(x)$
 \Rightarrow
 میانی
 x حساسی

تذکره: استرس مطلق (بر خلاف نسبی) می تواند در نقاط انتهایی یا منفرد رخ دهد.

تذکره: منظور از استرس معمولاً عرض الاسترس است.

مثال:



قضیه ۱: اگر f روی $[a, b]$ پیوسته باشد آنگاه در این بازه ماکزیمیم مطلق دارد.

قضیه ۲: اگر f در x مشتق پذیر و استرس نسبی باشد آنگاه $f'(x) = 0$.

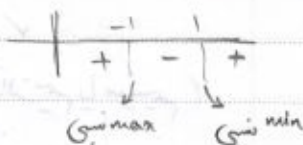
تذکره: علی قضیه وقتی برقرار است که f در x تغییر علامت دهد.

لکه تذکره کاملتر صحیحتر: اگر f حول x تغییر علامت نیز بدهد:

f از - به + : \max نسبی

f از + به - : \min نسبی

$$y = x^3 - 3x \rightarrow y' = 3x^2 - 3$$



مثال:

روش یافتن نقاط الاسترم

نقاط بحرانی

(۱) الاسترم نسبی $f'(x_0) = 0$ یا $f'(x_0)$ ناموجود \leftarrow $\begin{matrix} \text{کاذبه} \\ \text{سیاه} \end{matrix}$ (۲) الاسترم مطلق \leftarrow نقاط بحرانی + نقاط انتهایی و شتر

روش های تعیین نوع الاسترم نسبی (وضعیت کاذبه ها)

(۱) آزمون مشتق اول (بررسی علامت f' در راست و چپ آن نقطه)(۲) آزمون مقایسه $f(x_0^+)$, $f(x_0)$, $f(x_0^-)$ (۳) خواص نامرئیه ها \leftarrow خصوصاً حسابی جندسی(۴) آزمون مشتق دوم (علامت f'')

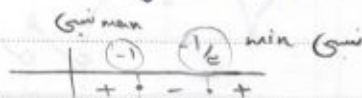
مثال: الاسترم های نسبی در نوع آن ها؟

$$y' = x^3 - 3x^2 + x$$

$$y = x^3 + 2x^2 + x \quad \text{الف}$$

$$y' = 0 \rightarrow 3x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$x_1 = -1 \quad x_2 = -1/3$$



$$y = \begin{cases} x-1 & x \geq 0 \\ 2-x & x < 0 \end{cases} \quad y' = 0 \quad \text{ب}$$

$$y' \text{ ناموجود} \rightarrow x = 0$$

$$f(0^+) = -1^+ \quad f(0^-) = 2^+ \quad f(0) = -1 \rightarrow \begin{matrix} \text{min} \\ \text{نسبی} \end{matrix}$$

$(-0.9) \quad (0.1)$

(ج) جهت تغییر و نقاط عطف:

① تغییر مثبت $\leftarrow f'$ صعودی $\leftarrow f'' > 0$ ② تغییر منفی $\leftarrow f'$ نزولی $\leftarrow f'' < 0$

②

تغیرو به پایین (منفی)
همه خطوط مماس بالای
منحنی

①

تغیرو به بالا (مثبت)
همه خطوط مماس زیر
منحنی

$$y = x^3 - x$$

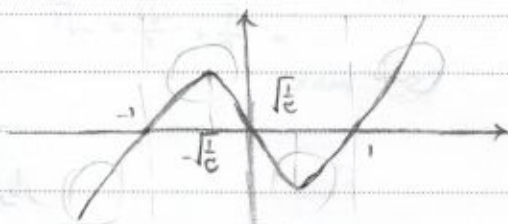
مثال:

$$y' = 3x^2 - 1$$

$$\begin{array}{c|ccc} & - & + & - & + \\ \hline y & - & + & - & + \\ \hline & -\sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} & & \end{array}$$

$$y'' = 6x$$

$$\begin{array}{c|cc} & - & + \\ \hline y & - & + \\ \hline & 0 & \end{array}$$



نقطه عطف: نقطه‌ای که در شرط زیر ا همزمان داشته باشد:



(۱) خط مماس در آن نقطه موجود باشد

(۲) جهت تغییر در آن نقطه عوض شود

مثال: نقطه عطف

$$y = x^3$$

$$y' = 3x^2$$

$$\begin{array}{c|cc} & - & + \\ \hline y & - & + \\ \hline & 0 & \end{array}$$

(۰,۰)

$$y = \sqrt[3]{x}$$

$$y' = \frac{1}{3} x^{-2/3}$$

$$y'' = -\frac{2}{9} x^{-5/3} = -\frac{2}{9} \frac{1}{x^5 \sqrt[3]{x}}$$

(۰,۰)

$$\begin{array}{c|cc} & - & + \\ \hline y & - & + \\ \hline & 0 & \end{array}$$

$$y = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ -x^2 - 1 & x < 0 \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$$

$$y'' = \begin{cases} 2 & x \geq 0 \\ -2 & x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|cc} & - & + \\ \hline y & - & + \\ \hline & 0 & \end{array}$$

(۰,۰)

$$y = x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|cc} & - & + \\ \hline y & - & + \\ \hline & 0 & \end{array}$$

نکته ۱: گامهای عطف: $y'' = 0$ یا y' ناموجود

نکته ۲: در نقطه عطف، خط مماس از منحنی عبور می کند. (تعریف معادل عطف)

نکته ۳: توضیح آزمون مشتق دوم برای تشخیص نوع اکسترمم نسبی



$\Rightarrow \max$



$y'' > 0 \Rightarrow \min$

مثال: $y = \sin x + \cos x \quad (0, \pi)$

$$y' = \cos x + \sin x = 0 \rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow y'' = -\sin x + \cos x$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

$\rightarrow \max$ نسبی

رسم نمودار

مراحل: (۱) تعیین دامنه (در دوره تناوب)

(۲) بررسی رفتار حدی (رفتار در $\pm \infty$ و در $\pm \infty$ و در $\pm \infty$)

(۳) یافتن نقاط اکسترمم و عطف

(۴) تنظیم جدول تغییرات منحنی (شامل تعیین علامت y' و y'')

\Leftarrow رفتار صعودی / نزولی بودن + جهت تغییر در بازه های مختلف

(۵) رسم نمودار (نقاط کلیدی: محل برخورد با محور ها)

تذکره: در صورت زوج یا فرد بودن تابع ابتدا کافی است $x \geq 0$ را بررسی

نمایم.

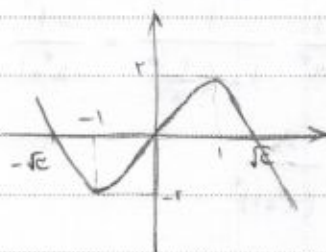
$$y = x^3 - x^2 \quad D = \mathbb{R}$$

مثال: رسم نموداری زیر:

$$y' = 3x^2 - 2x \quad y'' = 6x$$

y''	+	+	0	-	-
y'	-	0	+	+	0
	$+\infty$	\nearrow	\nearrow	\searrow	$-\infty$

نقطه سرجی نقطه نقطه سرجی



$$y = \frac{x}{1-x^2} \quad x \neq \pm 1$$

$y=0$ جانب افقی

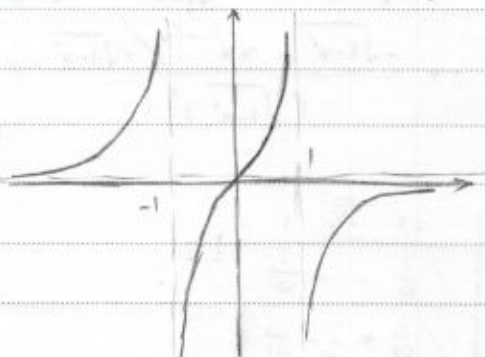
جانب های قائم $\begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$

$$y' = \frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$$

الگوریتم نیونی

$$y'' = \frac{2x(1-x^2)^2 + 2x(1-x^2)(1+x^2)}{(1-x^2)^4} = \frac{2x-2x^3+2x+2x^3}{(1-x^2)^3} = \frac{4x}{(1-x^2)^3}$$

	جانب	نقطه	جانب
	-	0	+
y''	+	0	-
y'	+	0	+
	$+\infty$	\nearrow	$+\infty$

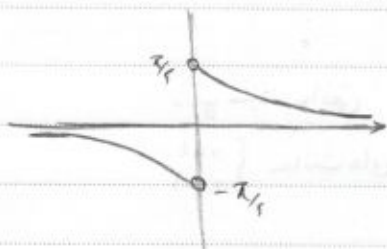


$$y = \tan^{-1} \frac{1}{x} \quad x \neq 0$$

$$y = 0 \quad \text{افنى}$$

$$y' = \frac{-1}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{-1}{x^2 + 1}$$

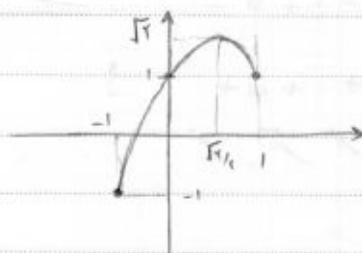
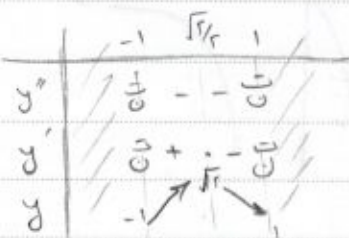
$$y'' = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$



$$y = x + \sqrt{1-x^2} \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$y' = 1 + \frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2} - x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \sqrt{1-x^2} = u \Rightarrow x = \frac{\sqrt{1-u^2}}{u}$$

$$y'' = \frac{-\sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{(\sqrt{1-x^2})^2} = \frac{-(1-x^2) - x^2}{(\sqrt{1-x^2})^3} = \frac{-1}{(\sqrt{1-x^2})^3}$$



Subject

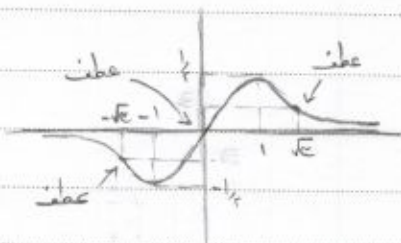
Date. Month. Year.

$$y = \frac{x}{x^2+1} \rightarrow y = 0 \text{ when } x=0$$

$$y' = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$y'' = \frac{-2x(x^2+1)^2 - (1-x^2)(2)(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4} = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} \rightarrow x=0, \pm\sqrt{3}$$

	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$
y''	$- \circ +$	$+ \circ -$		$- \circ +$	
y'	$-$	$- \circ +$	$+ \circ -$	$-$	
y	\searrow	\searrow	\nearrow	\nearrow	\searrow



Subject

Date. Month. Year.

Subject

Date. Month. Year.

$$\frac{x}{1+x} = 6$$

$$\frac{x^2-1}{(x+1)} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)} = 6$$

$$3x = \frac{(x^2-1)(x+1)}{(x+1)} = \frac{(x-1)(x+1)(x+1)}{(x+1)} = 6$$



2	1	0	3	
+	-	-	+	6
-	-	+	+	6
+	+	+	+	6